

7 Razão e Proporção

1. Razão de dois números a e b , $b \neq 0$, é o quociente $\frac{a}{b}$ ou $a : b$. (Lê-se a está para b)

SÉRIE I

Qual a razão de:

- 1) 12km e 24 000m?
- 2) 0,7kg e 210dag?
- 3) 60km/h e 40km/h?
- 4) 80m³ e 120m³?

Exemplo: 15km e 45 000m?

Devemos ter:

$$\frac{15\text{km}}{45\,000\text{m}} = \frac{15\,000\text{m}}{45\,000\text{m}} = \frac{15\,000}{45\,000} = \frac{1}{3}$$

SÉRIE II

Calcular a razão:

$$1) \frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{3}{2} \times \frac{4}{5}} =$$

$$3) \frac{0,2 + 1,3}{3 \times 0,4} =$$

$$2) \frac{2 \times \frac{1}{4}}{1 : \frac{2}{3}} =$$

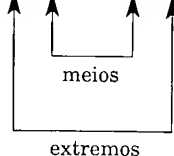
$$4) \frac{\sqrt{4}}{1 - 0,4} =$$

Exemplo: $\frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{2}}$

$$\frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} : \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

2. Proporção é a igualdade de duas razões.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ou } a : b = c : d, b \neq 0 \text{ e } d \neq 0$$



Propriedade fundamental:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

SÉRIE III

Exercícios

Escreva em forma de proporção:

$$1) 3 \times 4 = 2 \times 6$$

$$2) 4 \times 9 = 6 \times 6$$

$$3) x \cdot y = a \cdot b, \text{ onde } x, y, a \text{ e } b \text{ não são nulos.}$$

Exemplo: $3 \times 10 = 5 \times 6$

Devemos ter as seguintes possibilidades:

$$1^a) \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

$$2^a) \frac{3}{6} = \frac{5}{10} \quad (\text{alternando os meios})$$

$$3^a) \frac{10}{5} = \frac{6}{3} \quad (\text{alternando os extremos})$$

$$4^a) \frac{5}{3} = \frac{10}{6} \quad (\text{invertendo as razões})$$

$$5^a) \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$6^a) \frac{5}{10} = \frac{3}{6}$$

$$7^a) \frac{6}{3} = \frac{10}{5}$$

$$8^a) \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Transpondo as quatro primeiras proporções

Nota

Fora destas (8) disposições, não se terá proporção que *satisfaça* a igualdade dos produtos: $3 \times 10 = 5 \times 6$.

Proporção contínua é aquela cujos meios ou extremos são iguais.

Exemplo: $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$ ou $\frac{6}{9} = \frac{4}{6}$

SÉRIE IV

Escrever uma proporção contínua com os números:

$$1) 4, 8 \text{ e } 16$$

$$2) 1, \sqrt{5} \text{ e } 5$$

Exemplo: 3, 6 e 12

Devemos ter as seguintes possibilidades básicas:

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} \text{ ou } \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$$

SÉRIE V

Calcular o valor de x (4^a proporcional) em cada proporção:

$$1) \frac{4}{6} = \frac{x}{3}$$

$$2) \frac{15}{x} = \frac{10}{2}$$

$$3) \frac{6}{21} = \frac{2}{x}$$

Exemplo: $\frac{x}{4} = \frac{6}{8}$

$$\frac{x}{4} = \frac{6}{8} \Leftrightarrow 8 \cdot x = 4 \cdot 6 \therefore x = \frac{24}{8} \therefore x = 3$$

SÉRIE VI

Calcular o valor de x em cada proporção:

$$1) \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{1}}{\frac{1}{5}}$$

$$2) \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{x}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$3) \frac{2x}{\frac{3}{4}} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$4) \frac{x}{1,2} = \frac{0,6}{0,2}$$

Exemplo: $\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{4}}$

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \cdot x = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} \therefore \frac{3x}{4} = \frac{2}{21} \therefore$$

$$\therefore x = \frac{8}{63}$$

SÉRIE VII

Calcular o valor de x em cada proporção:

$$1) \frac{x}{9} = \frac{4}{x}$$

$$3) \frac{12}{x} = \frac{x}{3}$$

$$2) \frac{2}{x} = \frac{x}{32}$$

$$4) \frac{x}{5} = \frac{1}{x}$$

Exemplo: $\frac{x}{4} = \frac{16}{x}$

$$\frac{x}{4} = \frac{16}{x} \Leftrightarrow x \cdot x = 4 \cdot 16 \therefore x^2 = 64$$

$$\therefore x = \pm 8, \text{ ou seja, } x = 8 \text{ ou } x = -8$$

SÉRIE VIII

Calcular o valor de x em cada expressão:

$$1) \frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$2) \frac{1}{x} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$$

$$3) \frac{1}{6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{x}$$

$$4) \frac{1}{20} = \frac{1}{30} + \frac{1}{x}$$

Exemplo: $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

Devemos ter:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{3+2}{6} \therefore \frac{1}{x} = \frac{5}{6} \therefore$$

$$\therefore 5x = 6 \cdot 1 \therefore x = \frac{6}{5}$$

Propriedades das proporções

Dada a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos:

P.1) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ou $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$

P.2) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ ou $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

SÉRIE IX

Resolver os problemas:

1) A razão de dois números é $\frac{1}{3}$. Achar esses números sabendo que a soma deles é 16.

2) A razão das idades de duas pessoas é $\frac{2}{3}$. Achar essas idades sabendo que a soma delas é 35 anos.

3) A razão das medidas de dois segmentos é $\frac{3}{5}$. Achar essas medidas sabendo que a soma delas é 32 cm.

4) A razão das áreas de duas figuras é $\frac{4}{7}$. Achar essas áreas sabendo que a soma delas é 66 cm².

Exemplo: A razão de dois números é $\frac{2}{3}$. Achar esses números sabendo que a soma deles é 15.

Resolução:

Sejam x e y os números procurados, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3} \text{ e } x + y = 15$$

Aplicando a P.1, vem:

$$\frac{x+y}{y} = \frac{2+3}{3} \Rightarrow \frac{15}{y} = \frac{5}{3} \therefore y = \frac{15 \times 3}{5} = 9$$

e

$$\frac{x+y}{x} = \frac{2+3}{2} \Rightarrow \frac{15}{x} = \frac{5}{2} \therefore x = \frac{15 \times 2}{5} = 6$$

Resp.: Os números são 6 e 9.

SÉRIE X

Resolver os problemas:

- 1) A diferença de dois números é 12 e a razão é $\frac{2}{5}$. Achar esses números.
- 2) A diferença das idades de duas pessoas é 20 anos e a razão é $\frac{4}{9}$. Quais são as idades?
- 3) A diferença das medidas de dois ângulos é 60° e a razão é $\frac{2}{5}$. Quais são as medidas dos ângulos?
- 4) A diferença dos volumes de dois sólidos é 9cm^3 e a razão é $\frac{2}{3}$. Achar os volumes.

Exemplo: A diferença de dois números positivos é 21 e a razão é $\frac{1}{4}$.

Achar esses números.

Resolução:

Sejam x e y os números procurados, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{4} \text{ e } y - x = 21 (y > x)$$

Aplicando a P.2, vem:

$$\frac{y-x}{y} = \frac{4-1}{4} \Rightarrow \frac{21}{y} = \frac{3}{4} \therefore$$

$$\therefore y = \frac{21 \times 4}{3} = 28 \text{ e}$$

$$\frac{y-x}{x} = \frac{4-1}{1} \Rightarrow \frac{21}{x} = \frac{3}{1} \therefore$$

$$\therefore x = \frac{21 \times 1}{3} = 7$$

Resp.: Os números são 7 e 28.

Propriedades das proporções

Dada a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos:

$$\text{P.3) } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

Dada uma série de razões iguais:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \dots, \text{ temos:}$$

$$\text{P.4) } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots}$$

SÉRIE XI

Resolva os problemas:

- 1) A soma de três números é 90. Achar esses números sabendo que eles são proporcionais aos números 3, 5 e 7.
- 2) A soma das medidas dos lados de um triângulo é 48cm. Achar os lados desse triângulo sabendo que as medidas dos lados são proporcionais aos números 3, 4 e 5.
- 3) As medidas, em graus, dos ângulos internos de um triângulo são proporcionais aos números 3, 7 e 8. Achar essas medidas.
Sugestão: A soma das três medidas é 180° .
- 4) Uma circunferência é dividida em três arcos, cujas medidas em graus são proporcionais aos números 4, 6 e 8. Achar essas medidas.
Sugestão: A soma das três medidas é 360° .

Exemplo: A soma de três números é 180. Achar esses números sabendo que eles são proporcionais aos números 4, 5 e 6.

Resolução:

Sejam x , y e z os números procurados, temos: $x + y + z = 180$ e

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$$

Aplicando a P.4, vem:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} = \frac{x+y+z}{4+5+6} = \frac{180}{15} = \frac{12}{1}$$

$$\text{Daí, } \frac{x}{4} = \frac{12}{1} \therefore x = 48$$

$$\frac{y}{5} = \frac{12}{1} \therefore y = 60$$

$$\frac{z}{6} = \frac{12}{1} \therefore z = 72$$

Resp.: Os números são 48, 60 e 72.